

Αστροφυσική Ι Σειρά Ασκήσεων ΙΙ

1. Θεωρείστε ότι η πυκνότητα στην φωτόσφαιρα του Ήλιου είναι $2.2 \times 10^{-4} \text{ kg m}^{-3}$. Έστω ότι την παρατηρείτε σε δύο μήκη κύματος, λ_1 και λ_2 , για τα οποία ο συντελεστής απορρόφησης είναι $\kappa_{\lambda_1} = 0.026 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ και $\kappa_{\lambda_2} = 0.030 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ αντίστοιχα. Υπολογίστε την απόσταση μέσα στη φωτόσφαιρα (σε km) μέχρι το οπτικό βάθος να γίνει ίσο με $2/3$ και για τα δύο μήκη κύματος. Σε ποιο μήκος κύματος βλέπετε "πιο βαθιά" στη φωτόσφαιρα, και κατά πόσο; Λόγω αυτού του φαινομένου οι αστρονόμοι μπορούν να παρατηρήσουν τη φωτόσφαιρα του Ήλιου σε διαφορετικά "βάθη".

2. Οι βασικές εξισώσεις που καθορίζουν τη δομή στο εσωτερικό των αστέρων της κύριας ακολουθίας είναι η εξίσωση υδροστατικής ισοροπίας, $\frac{dP}{dr} = \frac{-GM(r)\rho(r)}{r^2}$, και η εξίσωση συνέχειας της μάζας:

$$\frac{dM}{dr} = \rho(r)4\pi r^2. \text{ Υποθέστε ότι η πυκνότητα ενός αστέρα αλλάζει με την απόσταση από το κέντρο του}$$

ως εξής: $\rho(r) = \rho_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$, όπου R είναι η ακτίνα του αστέρα και ρ_0 μία σταθερά. **α)** Υπολογίστε πως αλλάζει η μάζα του αστέρα συναρτήσει των r και ρ_0 και δείξτε ότι: $M = (8/15)\pi\rho_0 R^3$. **β)** Δείξτε ότι, η πίεση στο κέντρο του αστέρα θα είναι ίση με: $P_c = (G\rho_0 M)/(2R)$

3. Δείξτε ότι ο ρυθμός διαφυγής μάζας από την επιφάνεια του Ήλιου είναι $\sim 3 \times 10^{-14} \text{ M}_\odot \text{ yr}^{-1}$, αν η ταχύτητα και πυκνότητα του Ηλιακού ανέμου είναι 500 km/sec και $7 \times 10^6 \text{ ιόντα H/m}^3$, σε απόσταση 1 AU από τον Ήλιο. **β)** Δείξτε ότι ο ρυθμός με τον οποίο ελαττώνεται η μάζα του Ήλιου λόγω των πυρηνικών αντιδράσεων που πραγματοποιούνται στο κέντρο του είναι ίσος με $\sim 7 \times 10^{-14} \text{ M}_\odot \text{ yr}^{-1}$ (μην ξεχνάτε ότι $E=mc^2$). Θεωρείστε και τις δύο τιμές ελάττωσης της μάζας που υπολογίσατε. Θα αλλάξει σημαντικά η μάζα του Ήλιου όσο βρίσκεται στην κύρια ακολουθία;

4. Η συνολική ενέργεια του Ήλιου είναι ίση με το άθροισμα της δυναμικής ενέργειάς του και της συνολικής θερμικής κινητικής ενέργειας όλων των σωματιδίων του. **α)** Υπολογίστε τη δυναμική του ενέργεια (σε J), και στη συνέχεια την κινητική ενέργεια όλων των σωματιδίων, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Virial. **β)** Στη συνέχεια, αφού υπολογίσετε το συνολικό αριθμό των σωματιδίων στον Ήλιο βρείτε τη θερμοκρασία T του Ήλιου. Πως συγκρίνεται με τη θερμοκρασία στο κέντρο του; (υποθέστε ότι ο Ήλιος αποτελείται μόνο από υδρογόνο).

5. Υπολογίστε το ρυθμό (σε κιλά ανα δευτερόλεπτο) με τον οποίο ο Ήλιος μετατρέπει το υδρογόνο σε ήλιο στο κέντρο του.

6. Ο Ήλιος θερμαίνεται μέσω της αλυσίδας αντιδράσεων "p-p" στο εσωτερικό του. Κατά τη διάρκεια αυτών των αντιδράσεων 4 πρωτόνια παράγουν ένα πυρήνα ηλίου καθώς και ένα νετρίνο, 2 φωτόνια ακτίνων γ και ένα ποζιτρόνιο. **α)** Στο μάθημα αναφέραμε ότι η μεταβολή στην ένταση ακτινοβολίας μήκους κύματος λ (dI_λ) λόγω απορρόφησης καθώς διέρχεται από υλικό μήκους ds , δίνεται από τη σχέση $dI_\lambda = -k_\lambda \rho I_\lambda ds$, όπου I_λ είναι η αρχική ένταση ακτινοβολίας, k_λ είναι ο συντελεστής απορρόφησης του υλικού στο μήκος κύματος λ και ρ η πυκνότητά του. Δείξτε ότι, αν τα k_λ και ρ είναι σταθερά καθώς η ακτινοβολία διέρχεται μέσω υλικού συνολικού μήκους S , τότε η τελική ένταση ακτινοβολίας ($I_{\lambda,f}$) συνδέεται με την αρχική ένταση ακτινοβολίας ($I_{\lambda,0}$) μέσω της σχέσης: $I_{\lambda,f} = I_{\lambda,0} \exp(-k_\lambda \rho S)$. **β)** Βρείτε τη "μέση ελεύθερη διαδρομή" ενός φωτονίου ακτίνων γ στον πυρήνα του Ήλιου αν $k_{\text{ακτίνων-}\gamma} = 0.12 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$ και $\rho_{\text{πυρήνα}} = 1.5 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3}$. **γ)** Πόση είναι η ενέργεια (σε MeV) που απελευθερώνεται ανά πρωτόνιο κατά τη διάρκεια των αντιδράσεων της αλυσίδας "πρωτονίου-πρωτονίου"; Με βάση τις απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα, εξηγήστε πως αυτή η ενέργεια θερμαίνει το εσωτερικό του Ήλιου.